ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Σχολικό βιβλίο σελ. 133)

Α2. (Σχολικό βιβλίο σελ. 51)

Α3. (Σχολικό βιβλίο σελ. 185).

Α4. α) ΛΑΘΟΣ , β) ΣΩΣΤΟ , γ) ΣΩΣΤΟ , δ) ΣΩΣΤΟ
ε) ΛΑΘΟΣ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $A_f = (1, +\infty)$, $A_g = [2, +\infty)$

$$A_{f\circ g} = \{x \in A_g \mid g(x) \in A_f\} = \{x \geq 2 \mid \sqrt{x-2}+1 > 1\}$$
$$= \{x \geq 2 \mid \sqrt{x-2} > 0\} = \{x \geq 2 \mid x > 2\} = (2, +\infty) \neq \emptyset$$

Τότε $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 2\ln(g(x)-1) = 2\ln\sqrt{x-2}$
$$= \ln\left(\sqrt{x-2}^{\,2}\right) = \ln(x-2)$$

Β2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ ως...
με $h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0$, για κάθε $x > 2$, άρα η h
είναι γν. αύξουσα στο $(2, +\infty)$ οπότε είναι "1-1"
και αντιστρέψιμη.

Η h είναι συνεχής κ' γν. αύξουσα στο $A_h = (2, +\infty)$
οπότε: $h(A_h) = \left(\lim\limits_{x\to 2^+} h(x), \lim\limits_{x\to +\infty} h(x)\right) = (-\infty, +\infty)$

αφού: $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2) \underset{\substack{x\to 2^+ \\ u\to 0^+}}{\overset{\text{θέτω } u=x-2}{=\!=}} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x-2) \underset{\substack{x\to +\infty \\ t\to +\infty}}{\overset{\text{θέτω } x-2=t}{=\!=}} \lim\limits_{t\to +\infty} \ln t = +\infty$

Για $x \in A_h = (2, +\infty)$ και $y \in h(A_h) = \mathbb{R}$

Ισχύει: $h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = \ln e^y$

$\xLeftrightarrow{1-1} x - 2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2$

Άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2$ με $A_{h^{-1}} = \mathbb{R}$

Β3. Είναι:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = 2$$

από το Β2. $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = -\infty$

Άρα $\lim\limits_{x \to 2} \left(h(x) \cdot \dfrac{f(x)}{x-2} \right) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(h(x) \cdot \dfrac{f(x)}{x-2} \right) = (-\infty) \cdot (2) = -\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 i) Αφού η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

• Αν $\kappa > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\kappa x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \kappa x = +\infty$, Άτοπο

• Αν $\kappa < 0$: ομοίως $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dots = \lim\limits_{x \to +\infty} \kappa x = -\infty$, Άτοπο

Άρα $\kappa = 0$

ii) Για $\kappa = 0$ $f(x) = \dfrac{\mu x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ...

$$f'(x) = \frac{\mu(x^2+1) - 2\mu x^2}{(x^2+1)^2}$$

Αφού η $y = x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $(0,0)$ πρέπει:

$f(0) = 0$, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\mu}{1} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$

Γ2 i) Για $\kappa=0$ και $\mu=1$ είναι $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ... με

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \iff \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0 \iff x^2=1 \iff x=1 \text{ ή } x=-1$$

$$f'(x)>0 \iff \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}>0 \xLeftrightarrow[\forall x\in\mathbb{R}]{(x^2+1)^2>0} 1-x^2>0 \iff x^2<1$$

$$|x|<1 \iff -1<x<1.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0
			Ο.Ε $f(-1)=-\frac{1}{2}$		Ο.Μ $f(1)=\frac{1}{2}$		

Στο $x=-1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(-1)=-\frac{1}{2}$

Στο $x=1$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(1)=\frac{1}{2}$

ii) Από το Γ2 (i) ισχύει: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως ευτί και η ελάχιστη τιμή της είναι το $-\frac{1}{2}$ και η μέγιστη τιμή είναι το $\frac{1}{2}$ άρα $f(A_f)=f(\mathbb{R})=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

Για $\alpha\neq 0$: $\alpha^2>0 \Rightarrow \alpha^2+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$ άρα $\alpha^2+\frac{1}{2}\notin f(A_f)$ άρα η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$ είναι αδύνατη.

Αν $\alpha=0$ τότε $\alpha^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, τότε η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$ έχει μοναδική λύση την $x=1$

Γ3 i) $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 x^{2\nu+1}\,dx$

$= \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right] = \frac{1}{2\nu+2}$

ii) $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 \quad (*)$

απο Γ3 (i) ισχύει $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$ (1)

$(1) \xrightarrow{\nu=0} I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \overset{(*)}{\iff} I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \iff$

$I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}$ (2)

$(1) \xrightarrow{\nu=1} I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \overset{(2)}{\iff} I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1-\ln 2}{2}$

$\iff I_2 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε την συνάρτηση: $h(x) = g(x) + x$, $x \in [-1,0]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχων συναρτήσεων
- $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$ και $h(0) = g(0) > 0$

αφού ισχύει $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αρα $h(-1)\cdot h(0) < 0$, απο το Θ. Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_1 \in (-1,0)$:

$h(x_1) = 0 \iff g(x_1) + x_1 = 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ ως άθροισμα παραγωγισιμων συναρτήσεων με:

$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$

Απο υπόθεση g' συνεχής στο $(-1,0)$ άρα η h' συνεχής στο $(-1,0)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων αφού $h'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-1,0)$ από συνέπειες του Θ. Bolzano η h' διατηρεί σταθερό πρόσημο άρα η h είναι γνησίως μονότονη άρα $x = x_1$ μοναδική ρίζα της h στο $(-1,0)$.

Δ2. Η f παραγωγίσιμη στο A_f άρα και στο $x_0 = 0$.

οποτε: $$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow$$

$$0 = 3 - \kappa \Leftrightarrow \kappa = 3 \quad \text{αφού:}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 \cdot (g(x)+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} (x \cdot g(x) + x^2)$$

$$= 0 \cdot g(0) + 0 = 0 \quad \text{, αφού η } g \text{ συνεχής.}$$

και $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa \right) = 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

Δ3. ① Για $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ είναι $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$.

Η f παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{\pi}{2})$ ως ... με

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 (2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0 \quad \forall x \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$ και αφού

η f συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2})$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$

Τοτε για $x \in [0, \frac{\pi}{2})$:

$$x \geq 0 \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0.$$

Δ3 (α) $3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

η f συνεχης κ γνησιως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$ άρα

$f([0, \frac{\pi}{2})) = [f(0), \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)) = [0, +\infty)$

αφου: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = 2 + (+\infty) - \frac{3\pi}{2} = +\infty$

και $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \overset{\frac{1}{0(+)}}{=} +\infty$ (συνx>0 οταν $x \to \frac{\pi}{2}^-$)

Ο αριθμός $\frac{\pi}{3} \in f([0, \frac{\pi}{2}))$ άρα υπάρχει ένα

τουλαχιστον $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2})$: $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ το οποίο

είναι μοναδικο αφού η f είναι γν. αυξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$.

Δ4 (ι) απο το Δ1 η συναρτηση $h(x) = g(x) + x$

είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1, 0)$ με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$

και αφου είναι συνεχης διατηρει σταθερο προσημο

στο $(x_1, 0)$

. Αν $h'(x) < 0$ $\forall x \in (x_1, 0)$ τοτε η h γν φθινουσα στο $[x_1, 0]$

Τοτε : $x_1 < 0 \overset{h \downarrow}{\Rightarrow} h(x_1) > h(0) \overset{Δ1}{\Rightarrow} 0 > g(0)$ άτοπο

αφου $0 < g(x) < 1$.

Άρα $h'(x) > 0$ οπότε η h είναι γν αύξουσα

στο $[x_1, 0]$ Τότε

$x_1 \le x \le 0 \overset{h \uparrow}{\Rightarrow} h(x_1) \le h(x) \le h(0) \Rightarrow$

$0 \le h(x) \le h(0)$.

Αφου $x^2 \geq 0$ στο $[x_1, 0]$ κ $h(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$

Τότε $f(x) \geq 0$ για $x \in [x_1, 0]$.

Δ4 (ii)

Είναι $E(\Omega)=\int_{x_1}^{f(x_1)} |f(x)|\partial x$

Αν ο yy' χωρίζει το Ω σε δυο ισεμβαδικά χωρία πρέπει:

$$\int_{x_1}^{0} |f(x)|\partial x = \int_{0}^{f(x_2)} |f(x)|\partial x \quad (1)$$

από Δ3 ισχύει: $f(x_2)=\frac{\pi}{3}$ και $f(x)\geq 0$ $x\in[0,\frac{\pi}{2})$

από Δ4 ισχύει: $f(x)\geq 0$ στο $[x_1,0]$ οποτε η (1) γίνεται:

$$\int_{x_1}^{0} x^2(g(x)+x)\partial x = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx \iff$$

$$\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\partial x + \int_{x_1}^{0} x^3\partial x = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\eta\mu x + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - 3x\right)\partial x \iff$$

$$\left[\frac{x^3}{3} g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x)\partial x + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} \iff$$

$$\iff \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\partial x = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}.$$