ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Σχολικό βιβλίο σελ. 76)
Α2. (Σχολικό βιβλίο σελ. 155)
Α3. (Σχολικό βιβλίο σελ. 216)
Α4. α) ΣΩΣΤΟ, β) ΣΩΣΤΟ, γ) ΛΑΘΟΣ, δ) ΛΑΘΟΣ, ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β.

Β1). Είναι $A_g = [1, +\infty)$, $A_h = [1, +\infty)$

· $h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

· $A_f = A_g \cap A_h - \{x \,/\, h(x) = 0\} = [1, +\infty) - \{1\} = (1, +\infty)$
με $f(x) = \left(\dfrac{g}{h}\right)(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \dfrac{x+1}{x-1}$

· $A_r = A_g \cap A_h = [1, +\infty)$ με
$r(x) = (g \cdot h)(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \dfrac{1}{x}$

Β2). Η f είναι συνεχής κ' παρ/μη στο $(1, +\infty)$ με:

$$f'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall\, x > 1$$

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(1, +\infty)$ οπότε κ' 1-1 άρα αντιστρέψιμη.
Είναι $A_{f^{-1}} = f(A_f) \overset{f \searrow}{\underset{\text{συνεχής}}{=}} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right) = (1, +\infty)$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$ κ'

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) \cdot \dfrac{1}{x-1} = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 0$ με $x - 1 > 0$ όταν $x \to 1^+$

άρα για $x \in (1, +\infty)$ κ' $y \in (1, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x) = y \iff \frac{x+1}{x-1} = y \iff yx - y = x + 1 \iff$$

$$x \cdot (y-1) = y+1 \iff x = \frac{y+1}{y-1}$$

Άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $A_{f^{-1}} = (1, +\infty)$

Είναι $A_f = A_{f^{-1}} = (1, +\infty)$ κ' ισχύει $f(x) = f^{-1}(x)$ $\forall x \in (1, +\infty)$ Άρα $f = f^{-1}$

B3). Η r συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα η C_r δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{r(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$

$$\lim_{x \to +\infty} (r(x) - \lambda x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\cancel{x} - \frac{1}{x} - \cancel{x}\right) = 0 = \beta$$

Άρα η $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4). Πρέπει: $x > 1$

$f(x) > 1$, ισχύει $\forall x > 1$ αφού $f(A_f) = (1, +\infty)$

Τότε: $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x) \iff$

$$x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \iff$$

$$x^3 - x - 4x^2 + 4 = 0 \iff$$

$$x(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) = 0 \iff$$

$$(x^2 - 1)(x - 4) = 0 \iff$$

$x = 1$ απορ. ή $x = -1$ απορ ή $x = 4$ δεκτή

Άρα $x = 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $A_f=[0,+\infty)$ οπότε θα είναι και συνεχής στο $x=2$ άρα:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \iff e^{\lambda}=\lambda+1 \iff \lambda=0$$

αφού ισχύει: $e^x \geq x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $A_f=[0,+\infty)$

Για $x\in(0,2)$ η f είναι παρ/μη με:

$$f'(x)=-2<0 \quad \forall x\in(0,2)$$

Για $x\in(2,+\infty)$ η f είναι παρ/μη με:

$$f'(x)=-2x+4=-2(x-2)<0 \quad \forall x\in(2,+\infty)$$

Άρα

x	0		2		$+\infty$
f'		$-$		$-$	
f		$\searrow$		$\searrow$	
	Ο.Μ				

οπότε η f είναι γν. φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ αφού είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα κ στο $x=2$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=0$ το $f(0)=5$.

Γ3 i) Η f συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα είναι κ συνεχής στο $[0,3]\subseteq[0,+\infty)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-2}}=0$$

Άρα η f δεν είναι παρ/μη στο $x=2$, άρα δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0,3]$.

ii) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Δ κ Ε έχει κλίση: $\lambda_{\Delta E} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = -\frac{5}{3}$

για να υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην ευθεία ΔΕ αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,3)$: $f'(\xi) = \lambda_{\Delta E} = -\frac{5}{3}$

Αν $\xi \in (0,2)$ τότε: $f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2 = -\frac{5}{3}$, άτοπο.

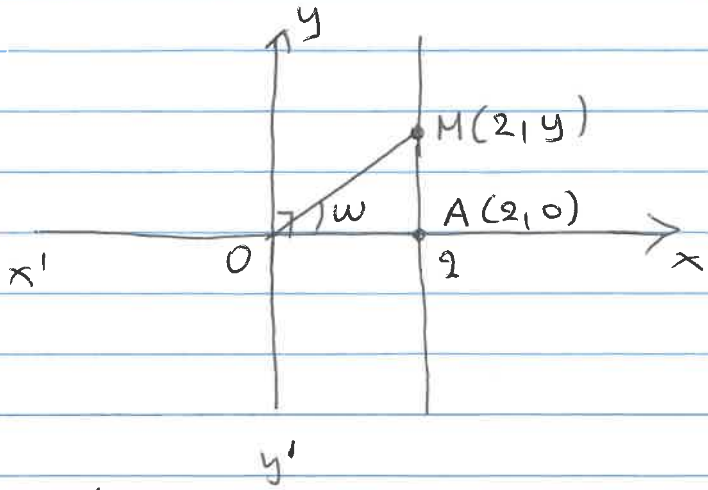
Αν $\xi \in (2,3)$ τότε: $f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow$
$\xi = \frac{17}{6}$ δεκτή

Επίσης $\xi \neq 2$, αφού η f δεν είναι παρ/μη στο $x=2$.

Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\Gamma\left(\frac{17}{6}, f\left(\frac{17}{6}\right)\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Δ, Ε.

Γ4)

Αφού το σημείο Μ κινείται κατακόρυφα προς τα επάνω με ταχύτητα $u = 0,5$ μον/sec



έστω $M(2, y)$

Είναι $y = y(t)$ με $y'(t) = 0,5$ μον/sec

Την $t = t_0$ το Μ συναντά την C_f άρα $y(t_0) = 1$ αφού η ευθεία $x=2$ τέμνει την C_f στο σημείο $(2, f(2)) = (2, 1)$

Στο $\overset{\triangle}{AOM}$ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AM}{OA} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{|y|}{2} \xRightarrow{y>0}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{2}y \quad . \text{ Είναι } \varepsilon\varphi(\omega(t)) = \frac{1}{2}y(t) \quad (1)$$

Άρα $\left(\varepsilon\varphi(\omega(t))\right)' = \left(\frac{1}{2}y(t)\right)' \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega(t))} \cdot \omega'(t) = \frac{1}{2}y'(t) \Rightarrow$$

$$\left(\varepsilon\varphi^2(\omega(t))+1\right)\cdot\omega'(t) = \frac{1}{2}y'(t) \quad (2)$$

$$(1) \xRightarrow{t=t_0} \varepsilon\varphi(\omega(t_0)) = \frac{y(t_0)}{2} \Rightarrow \varepsilon\varphi(\omega(t_0)) = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$(2) \xRightarrow{t=t_0} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right)\cdot\omega'(t_0) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}5 \Rightarrow \boxed{\omega'(t_0) = \frac{1}{5}\, rad/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

• $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow$

$$\ln x = \ln e \xLeftrightarrow{1-1} x = e$$

• $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} > 0 \underset{\forall x>0}{\overset{x^2>0}{\Longleftrightarrow}} 1-\ln x > 0 \Leftrightarrow$

$$\ln x < \ln e \underset{\ln x}{\overset{\nearrow}{\Leftrightarrow}} x < e$$

Η ρίζα κ' το πρόσημο της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		e	
f'	‖	$+$	0	$-$
f	‖	↗		↘
			ο.Μ.	

Στο $x=e$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο με μέγιστη τιμή το $f(e)=\frac{1+\alpha e}{e}=\frac{1}{e}+\alpha$

Είναι $f\left((0,+\infty)\right)=\left(-\infty,\ 1+\frac{1}{e}\right]$

άρα $f(e)=1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e}+\alpha=1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha=1.$

Δ2) Η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

· $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\ln 2+1=\ln e-\ln 4=\ln\frac{e}{4}<0$ αφού $\frac{e}{4}<1$

$f(1)=1>0$

άρα $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$, από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$:

$f(x_0)=0$

Το $x=x_0$ είναι μοναδική ρίζα της $f(x)=0$ στο $(0,e]$ αφού η f είναι γν. αύξουσα στο $(0,e]$.

Έστω $A_1=[e,+\infty)$, η f συνεχής κ' γν. φθίνουσα στο A_1 άρα

$f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\ f(e)\right]=\left(1,\ 1+\frac{1}{e}\right]$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)=1$

άρα ο αριθμός $0 \notin f(A_1)$, άρα η f δεν έχει ρίζα στο διάστημα A_1.

Άρα $x=x_0$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ κ βρίσκεται στο διάστημα $(\frac{1}{2},1)$.

Δ3) i) Ισχύει: $f(4)=\frac{\ln 4}{4}+1=\frac{2\ln 2}{4}+1=\frac{\ln 2}{2}+1=f(2)$

Αν $x\in(0,e]$: η f είναι γν. αύξουσα άρα κ "1−1" άρα:

$$f(x)=f(4) \Rightarrow f(x)=f(2) \overset{1-1}{\Longleftrightarrow} x=2$$

Αν $x\in[e,+\infty)$: η f είναι γν. φθίνουσα άρα κ "1−1" άρα:

$$f(x)=f(4) \overset{1-1}{\Longleftrightarrow} x=4.$$

Άρα η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς δυο λύσεις τις $x=2$ κ $x=4$.

ii) $x\in(0,+\infty)$

$$2^x\leq x^2 \overset{\ln x \uparrow}{\Longleftrightarrow} \ln 2^x \leq \ln x^2 \Longleftrightarrow x\ln 2\leq 2\ln x$$

$$\overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \frac{\ln x}{x}\geq\frac{\ln 2}{2} \Longleftrightarrow \frac{\ln x}{x}+1\geq\frac{\ln 2}{2}+1$$

$$\Longleftrightarrow f(x)\geq f(2) \quad (1)$$

Αν $x\in(0,e]$ η f είναι γν. αύξουσα:

$$(1) \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} x\geq 2 \qquad \text{Άρα } 2\leq x\leq e$$

Αν $x\in[e,+\infty)$ η f είναι γν. φθίνουσα.

$$(1) \overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow} f(x)\geq f(4) \Longleftrightarrow x\leq 4$$

Άρα $e\leq x\leq 4$

Άρα $x\in[2,4]$.

Δ4)

Η g είναι συνεχής στο $[-\ln 2, 0]$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)|\, dx = \int_{-\ln 2}^{0} \left| f(e^x)\, \frac{1-x}{e^x} \right| dx \quad (1)$$

Για $x \in [-\ln 2, 0]$: $\frac{1-x}{e^x} > 0$ άρα

$$(1) \Rightarrow E(\Omega) = \int_{-\ln 2}^{0} |f(e^x)|\, \frac{1-x}{e^x}\, dx \quad (2)$$

Θέτω $e^x = u \xrightarrow{u>0} x = \ln u$

τότε $(x)'\, dx = (\ln u)'\, du \Rightarrow$

$dx = \frac{1}{u}\, du$

x	0	$-\ln 2$
u	1	$\frac{1}{2}$

$$(2) \Rightarrow E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u)|\, \frac{1-\ln u}{u}\, \frac{du}{u} \Rightarrow$$

$$\boxed{E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u)|\, f'(u)\, du} \quad (3)$$

Από το Δ1. $x = x_0$ μοναδική ρίζα της f, επίσης η f είναι γν. αύξουσα στο $(0, e]$ άρα

για: $\frac{1}{2} \le x < x_0 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) < f(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$

αν: $x_0 < x \le 1 \xrightarrow{f \uparrow} f(x_0) < f(x) \Rightarrow f(x) > 0$

Άρα για το διάστημα $[\frac{1}{2}, 1]$ οι ρίζες & το πρόσημο της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$\frac{1}{2}$		x_0		1
f	//	$-$	0	$+$	//

Άρα $E(\Omega) \overset{(3)}{=} -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u) \cdot f'(u)\,du + \int_{x_0}^{1} f(u) \cdot f'(u)\,du$

$$= -\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^{1}$$

$$= \dots = \frac{(1-2\ln 2)^2+1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Επιμέλεια λύσεων:
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΚΠ/ΡΙΩΝ ΔΙΑΜΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ - ΜΠΑΡΙΚΑΓΙΑΝΝΗ.